DOI: 10.5604/01.3001.0014.0524

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
TOM LXV – ZESZYT 1 – 2018

Dariusz KACPRZAK[1]

Rozmyta metoda SAW z wagami uzyskanymi za pomocą rozmytej entropii[2]

1. WSTĘP

Człowiek w życiu codziennym bezustannie spotyka się z sytuacjami, w których musi dokonywać wyborów (pojmować decyzje), a rosnąca złożoność otaczającego nas świata sprawia, że zadania te stają się coraz trudniejsze. Przyczyniło się to do rozwoju tzw. dyskretnych metod wielokryterialnych wspomagania decyzji (ang. *Multiple Criteria Decision Making* – $MCDM$). Dysponują one gotowymi algorytmami postępowania w celu dokonania wyboru wariantu końcowego w świetle przyjętych kryteriów. W metodach tych zbiór danych wejściowych stanowią:

– zbiór wariantów decyzyjnych, z których chcemy wybrać wariant końcowy,
– zbiór kryteriów, względem których oceniane są rozważane warianty decyzyjne,
– wektor wag określający istotność (ważność) poszczególnych kryteriów,
– macierz decyzyjna złożona z ocen poszczególnych wariantów decyzyjnych względem kryteriów.

Metody wielokryterialne wspomagania decyzji na podstawie powyższych informacji tworzą ranking rozważanych wariantów decyzyjnych w świetle przyjętych kryteriów, poprzez liniowe uporządkowanie od wariantu końcowego (najwyższa pozycja w rankingu) do najsłabszego (najniższa pozycja rankingu).

W klasycznych wersjach metod wielokryterialnych wagi kryteriów oraz elementy macierzy decyzyjnej są wyrażane za pomocą liczb rzeczywistych. Jednak złożoność dokonywanych wyborów, a z drugiej strony ich masowość (duża ilość decyzji, wybory mogą następować jeden po drugim) powoduje, że szczegółowa analiza i precyzyjna ocena sytuacji decyzyjnej może okazać się bardzo trudna. Oznacza to konieczność dokonywania wyborów w sytuacji niepełnej informacji lub też niepodjęcia decyzji wcale. Dodatkowo decydenci (eksperci) dokonują oceny zgodne z ich poziomem wiedzy, doświadczeniem i często są one uzależnione od dostępnych informacji o rozważanym problemie decyzyjnym, a ich

[1] Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki, Katedra Matematyki, ul. Wiejska 45A, 15–351 Białystok, Polska, e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl.

[2] Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

oceny mają często charakter lingwistyczny. Sprawia to, że w metodach wielokryterialnych powszechnie zaczęto stosować liczby rozmyte. Pozwalają one na matematyczne prezentowanie i przetwarzanie informacji nieprecyzyjnej czy niepełnej oraz wyrażonej za pomocą zmiennych lingwistycznych. Otrzymane w ten sposób metody nazywamy rozmytymi metodami wielokryterialnymi wspomagania decyzji (ang. *Fuzzy Multiple Criteria Decision Making* – $FMCDM$).

Jedną z najprostszych i powszechnie stosowanych metod wielokryterialnych jest metoda SAW (ang. *Simple Additive Weighting*). Idea tej metody sprowadza się do wyznaczenia dla każdego wariantu decyzyjnego kombinacji liniowej elementów znormalizowanej macierzy decyzyjnej oraz odpowiednich elementów wektora wag. Pozwala to na liniowe uporządkowanie rozważanych wariantów decyzyjnych i wybranie wariantu końcowego w świetle przyjętych kryteriów. Rozmyta wersja metody SAW, w której oceny wariantów decyzyjnych i/lub wagi kryteriów są wyrażone za pomocą liczb rozmytych, metoda $FSAW$ (ang. *Fuzzy Simple Additive Weighting*), mimo prostoty znajduje zastosowanie w rozwiązaniu wielu problemów życia codziennego. Wykorzystano ją m.in. do oceny poziomu osiągnięć studentów (Deni i inni, 2013), do wyboru dostawcy w łańcuchu dostaw (Gupta, Gupta, 2012), do wyboru strategii konserwacji urządzeń magazynowych (Sagar i inni, 2013), do wyboru lokalizacji jednostki medycznej (Lin i inni, 2010), do rankingu wskaźników zdrowotnych określających jakość życia (Abdullah, Jamal, 2010). Pokazuje to, że zastosowania metody $FSAW$ są różnorodne. Opierając się na pracach opublikowanych w latach 2003–2013 wykorzystujących metodę $FSAW$ (lub SAW) Abdullah, Adawiyah (2014) dokonali podziału obszarów jej zastosowania na: zarządzanie (52,63%), technologie informacyjne (10,53%), zdrowie (10,53%), edukacja (5,26%) i inżynieria (5,26%).

W metodach wielokryterialnych różnorodność kryteriów powoduje, że mają one różne znaczenie i wpływ na wybór wariantu końcowego. Sprawia to, że wyznaczenie odpowiednich wag, które określają istotność poszczególnych kryteriów, staje się jednym z kluczowych elementów tych metod. Istnieje wiele sposobów wyznaczania wag kryteriów, które zazwyczaj podzielone są na dwie grupy: wagi subiektywne i wagi obiektywne. Wagi subiektywne są uzyskiwane m.in. przez określenie preferencji decydenta, oceny eksperckie, badania ankietowe, konsultacje społeczne czy zastosowanie metody AHP. Z kolei wagi obiektywne są uzyskiwane za pomocą metod matematycznych bez odwoływania się do wiedzy, doświadczenia czy preferencji decydentów oraz ekspertów. Jedną z metod wyznaczania wag obiektywnych jest metoda entropii. Entropia określa stopień nie uporządkowania zbioru, inaczej stopień jego wyjątkowości. Pozwala ona na określenie istotności poszczególnych kryteriów na podstawie rozbieżności wartości każdego z nich.

Celem pracy jest przedstawienie rozmytej metody SAW z nieznanymi wagami kryteriów. Wydaje się zasadne i logiczne, że jeżeli oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów są opisane liczbami rozmytymi, to również wagi kryteriów powinny być reprezentowane przez liczby rozmyte. W tej sytuacji rozmyte wagi zostaną wyznaczone z wykorzystaniem rozmytej entropii. Praca składa się z siedmiu części. W drugiej przedstawiono podstawowe informacje o liczbach rozmytych. Kolejna jest poświęcona na omówienie klasycznej metody SAW i metody wyznaczania wag kryteriów z użyciem entropii. Część czwarta prezentuje proponowaną rozmytą metodę SAW z rozmytymi wagami, a piąta przykład liczbowy. Praca kończy się porównaniem proponowanej metody z innymi metodami wykorzystującymi entropię do określanie wag kryteriów oraz podsumowaniem.

2. LICZBY ROZMYTE

Teorię zbiorów rozmytych, jako rozszerzenie klasycznej teorii zbiorów, zapoczątkował Lotfi Asker Zadeha. W pracy pod tytułem *Fuzzy Sets* (Zadeh, 1965) wprowadził on pojęcie zbioru rozmytego, który pozwala na opisywanie i matematyczne modelowanie wielkości nieprecyzyjnych czy też wyrażonych za pomocą języka mówionego. Znalazło to szerokie zastosowanie praktyczne, szczególnie w zagadnieniach zawiązanych ze sterowaniem i wspomaganiem podejmowania decyzji.

Definicja 1 (Zadeh, 1965). Niech X będzie przestrzenią obiektów. Zbiorem rozmytym A w przestrzeni X nazywa się zbiór par

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ jest funkcją przynależności, która każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A.

Definicja 2 (Czogała, Pedrycz, 1985). Liczba rozmyta A to zbiór rozmyty osi rzeczywistej $\mathbb{R}$ $(X = \mathbb{R})$, którego funkcja przynależności

$$\mu_A : X \to [0,1] \tag{2}$$

spełnia następujące warunki

- normalność, tzn.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_A(x) = 1, \tag{3}$$

- wypukłość, tzn.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ y \in [x, z] :\ \mu_A(y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(z)\}. \tag{4}$$

W praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych, np. w metodzie $FSAW$, często wykorzystuje się trójkątne dodatnie liczby rozmyte, które zapisujemy w formie

$$A = T(a_A; b_A; c_A), \text{ gdzie } 0 \leq a_A \leq b_A \leq c_A, \tag{5}$$

a ich funkcja przynależności ma postać

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_A}{b_A - a_A} & \text{gdy} \quad a_A \leq x \leq b_A, \\ \dfrac{c_A - x}{c_A - b_A} & \text{gdy} \quad b_A \leq x \leq c_A, \\ 0 & \text{gdy} \quad x \leq a_A \lor x \geq c_A. \end{cases} \tag{6}$$

Podstawowe działania arytmetyczne na trójkątnych dodatnich liczbach rozmytych $A = T(a_A; b_A; c_A)$, gdzie $0 \leq a_A \leq b_A \leq c_A$, i $B = T(a_B; b_B; c_B)$, gdzie $0 \leq a_B \leq b_B \leq c_B$, określamy następująco:

– dodawanie

$$A + B = T(a_A; b_A; c_A) + T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A + a_B; b_A + b_B; c_A + c_B), \tag{7}$$

– odejmowanie

$$A - B = T(a_A; b_A; c_A) - T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A - c_B; b_A - b_B; c_A - a_B), \tag{8}$$

– mnożenie

$$A * B = T(a_A; b_A; c_A) * T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A * a_B; b_A * b_B; c_A * c_B), \tag{9}$$

– mnożenie przez dodatnią liczbę rzeczywistą $r \in \mathbb{R}_+$

$$r * A = r * T(a_A; b_A; c_A) = T(r * a_A; r * b_A; r * c_A), \tag{10}$$

– dzielenie

$$A{:}B = T(a_A; b_A; c_A){:}T(a_B; b_B; c_B) = T(a_A{:}c_B; b_A{:}b_B; c_A{:}a_B), \text{ jeżeli } a_B > 0. \tag{11}$$

Wynikiem działań mnożenia (9) i dzielenia (11) trójkątnych liczb rozmytych nie muszą być trójkątne liczby rozmyte, jednak możemy je przybliżać trójkątnymi liczbami rozmytymi co jest wystarczające w wielu praktycznych zastosowaniach (Kaufmann, Gupta, 1988).

Do porównywania trójkątnych liczb rozmytych, będących wynikiem działania metody $FSAW$ opartej na trójkątnych liczbach rozmytych, wykorzystamy popularną metodę defuzyfikacji tzw. metodę środka ciężkości (*Center of Gravity* – CoG). Jeżeli A jest liczbą rozmytą o funkcji przynależności $\mu_A(x)$, metoda środka ciężkości opisana jest formułą

$$\phi_{CoG}(A) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x \cdot \mu_A(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \mu_A(x)dx}. \tag{12}$$

W przypadku trójkątnej dodatniej liczby rozmytej (5) o funkcji przynależności (6) formuła (12) przyjmuje postać

$$\phi_{CoG}\big(T(a_A; b_A; c_A)\big) = \frac{a_A + b_A + c_A}{3}. \tag{13}$$

3. KLASYCZNA METODA SAW ORAZ WYZNACZANIE WAG ZA POMOCĄ ENTROPII

Jak już wspomniano we wstępie, klasyczna metoda SAW (Churchman, Ackoff, 1954) jest jedną z najprostszych i najpopularniejszych metod wspomagających rozwiązywanie dyskretnych problemów wielokryterialnych. Załóżmy, że mamy zbiór m wariantów decyzyjnych $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, z których decydent chce wybrać wariant końcowy oraz zbiór n kryteriów $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$, względem których oceniane są rozważane warianty decyzyjne. Dowolny dyskretny wielokryterialny problem decyzyjny można przestawić w postaci tzw. macierzy decyzyjnej (14)

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

gdzie x_{ij} jest oceną i-tego wariantu decyzyjnego A_i $(i = 1, \dots, m)$ ze względu na j-te kryterium K_j $(j = 1, \dots, n)$ oraz wektora wag (15)

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n), \tag{15}$$

gdzie w_j jest wagą j-tego kryterium K_j $(j = 1, \dots, n)$, spełniającą zależność

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1. \tag{16}$$

Klasyczna wersja metody SAW zakłada, że oceny x_{ij} oraz wagi w_j są określone precyzyjnie za pomocą liczb rzeczywistych i przebiega w następujących etapach.

ETAP 1: Budowa macierzy decyzyjnej $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów postaci (14).

ETAP 2: Normalizacja ocen wariantów decyzyjnych w ramach danego kryterium, aby uzyskać jednolity charakter poszczególnych kryteriów, np. według formuły

$$z_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij}} & \text{gdy} \quad K_j - \text{stymulana}, \\ \frac{\min\limits_i x_{ij}}{x_{ij}} & \text{gdy} \quad K_j - \text{destymulanta}. \end{cases} \tag{17}$$

ETAP 3: Wyznaczenie dla każdego wariantu decyzyjnego kombinacji liniowej jego znormalizowanych ocen względem kryteriów (17) oraz wektora wagowego (15) według wzoru

$$SAW(A_i) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} w_j. \tag{18}$$

ETAP 4: Uporządkowanie liniowe wyników $SAW(A_i)$ i wybór wariantu końcowego w świetle przyjętych kryteriów, czyli tego dla którego zagregowana ocena (18) jest najwyższa.

Jedną z metod wyznaczania wektora wag (15), która zaliczana jest do tzw. metod obiektywnych, jest metoda oparta na entropii. Wykorzystuje ona informacje pochodzące z ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów, czyli z macierzy decyzyjnej (14) i przebiega w kilku etapach (Hwang, Yoon, 1981; Kobryń, 2014).

ETAP 1: Przekształcenie macierzy decyzyjnej (14) w macierz $\boldsymbol{Y} = (y_{ij})$, w której wszystkie kryteria będą miały charakter stymulant, tzn.

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{gdy} \quad K_j - \text{stymulana}, \\ 1/x_{ij} & \text{gdy} \quad K_j - \text{destymulana}. \end{cases} \tag{19}$$

ETAP 2: Normalizacja macierzy $\boldsymbol{Y} = (y_{ij})$ i otrzymanie macierzy $\boldsymbol{Z} = (z_{ij})$ o elementach

$$z_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} y_{ij}}. \tag{20}$$

ETAP 3: Wyznaczenie entropii za pomocą formuły

$$e_j = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^{m} z_{ij} \ln z_{ij}. \tag{21}$$

ETAP 4: Wyznaczenie poziomu zmienności entropii dla każdego kryterium (stopnia wewnętrznej rozbieżności ocen względem kolejnych kryteriów)

$$d_j = 1 - e_j. \tag{22}$$

ETAP 5: Wyznaczenie wag (stopnia ważności) kryteriów zgodnie ze wzorem

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j}. \tag{23}$$

Metodę entropii można również wykorzystać do korekty wag $\widehat{w}_j$ określonych subiektywnie, np. przez decydenta czy eksperta, stosując następującą formułę

$$\overline{w}_j = \frac{w_j \widehat{w}_j}{\sum_{j=1}^{n} w_j \widehat{w}_j}. \tag{24}$$

4. PROPONOWANA METODA

Załóżmy, że decydent chce dokonać wyboru jednego z m wariantów decyzyjnych $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, które są oceniane względem n kryteriów $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$. Proponowana rozmyta metoda SAW o wagach uzyskanych za pomocą rozmytej entropii przebiega w następujących etapach.

ETAP 1: Utworzenie macierzy decyzyjnej

$$\boldsymbol{X} = (x_{ij}), \tag{25}$$

gdzie $x_{ij} = T\left(a_{x_{ij}}; b_{x_{ij}}; c_{x_{ij}}\right)$ jest dodatnią trójkątną liczbą rozmytą będącą oceną wariantu decyzyjnego A_i względem kryterium K_j. Poszczególne elementy liczby x_{ij} możemy interpretować następująco: w przypadku stymulanty $a_{x_{ij}}$ oznacza ocenę pesymistyczną wariantu decyzyjnego A_i względem kryterium K_j, $b_{x_{ij}}$ ocenę najbardziej prawdopodobną, $c_{x_{ij}}$ ocenę optymistyczną, a w przypadku destymulanty interpretacje ocen $a_{x_{ij}}$ i $c_{x_{ij}}$ są zamienione.

ETAP 2: Normalizacja macierzy $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ ocen wariantów decyzyjnych w ramach danego kryterium i budowa macierzy $\boldsymbol{Z} = (z_{ij})$ zgodnie z formułą

$$z_{ij} = \begin{cases} T\left(\dfrac{a_{x_{ij}}}{\sum_i c_{x_{ij}}}; \dfrac{b_{x_{ij}}}{\sum_i c_{x_{ij}}}; \dfrac{c_{x_{ij}}}{\sum_i c_{x_{ij}}}\right) & \text{gdy} \quad K_j - \text{stymulana}, \\ T\left(\dfrac{1/c_{x_{ij}}}{\sum_i 1/a_{x_{ij}}}; \dfrac{1/b_{x_{ij}}}{\sum_i 1/a_{x_{ij}}}; \dfrac{1/a_{x_{ij}}}{\sum_i 1/a_{x_{ij}}}\right) & \text{gdy} \quad K_j - \text{destymulanta}. \end{cases} \tag{26}$$

ETAP 3: Wyznaczenie wag kryteriów.

ETAP 3.1: Wyznaczenie, dla każdego kryterium, entropii

$$e_j = T(a_{e_j}; b_{e_j}; c_{e_j}), \tag{27}$$

gdzie $a_{e_j} = k \sum_{i=1}^{m} a_{z_{ij}} \ln\left(a_{z_{ij}}\right)$, $b_{e_j} = k \sum_{i=1}^{m} b_{z_{ij}} \ln\left(b_{z_{ij}}\right)$, $c_{e_j} = k \sum_{i=1}^{m} c_{z_{ij}} \ln\left(c_{z_{ij}}\right)$ i $k = -\frac{1}{\ln m}$. W przypadku, gdy $a_{z_{ij}} = 0$ lub $b_{z_{ij}} = 0$ lub $c_{z_{ij}} = 0$ dla pewnego i, to wartość składnika, odpowiednio $a_{z_{ij}} \ln\left(a_{z_{ij}}\right)$ lub $b_{z_{ij}} \ln\left(b_{z_{ij}}\right)$ lub $c_{z_{ij}} \ln\left(c_{z_{ij}}\right)$ jest przyjmowana jako 0, co jest zgodne z granicą $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

UWAGA 1.

Biorąc pod uwagę monotoniczność funkcji $f(x) = x \ln x$ zauważmy, że gdy $a_{z_{ij}} > e^{-1}$ lub $b_{z_{ij}} > e^{-1}$ lub $c_{z_{ij}} > e^{-1}$ (tzn. nośnik liczby rozmytej z_{ij} nie leży w przedziale $[0; e^{-1}]$), liczby $e_j = T(a_{e_j}, b_{e_j}, c_{e_j})$ mogą nie być trójkątnymi dodatnimi liczbami rozmytymi, tzn. mogą nie spełniać warunku $0 \leq a_{e_j} < b_{e_j} < c_{e_j}$. Aby uniknąć takiej sytuacji (lub wyeliminować gdyby wystąpiła), możemy zastosować inną metodą normalizacji, np. przeskalowania liniowego (Kobryń, 2014, s.45, formuły 2.14 i 2.15).

ETAP 3.2: Wyznaczenie dla każdego kryterium poziomu zmienności entropii

$$d_j = T(1 - c_{e_j}; 1 - b_{e_j}; 1 - a_{e_j}). \tag{28}$$

ETAP 3.3: Wyznaczenie wag kryteriów

$$w_j = T\left(\frac{a_{d_j}}{\sum_{j=1}^{n} c_{d_j}}; \frac{b_{d_j}}{\sum_{j=1}^{n} b_{d_j}}; \frac{c_{d_j}}{\sum_{j=1}^{n} a_{d_j}}\right). \tag{29}$$

UWAGA 2.

Wagi uzyskane w ETAPIE 3.3 nie muszą spełniać warunku, że ich nośniki są zawarte w przedziale $[0; 1]$, tzn. $0 \leq a_{w_j} \leq b_{w_j} \leq c_{w_j} \leq 1$. Aby zapewnić spełnienie tego warunku możemy je znormalizować zgodnie z formułą

$$w_{nj} = T\left(\frac{a_{w_j}}{\sum_j c_{w_j}}; \frac{b_{w_j}}{\sum_j c_{w_j}}; \frac{c_{w_j}}{\sum_j c_{w_j}}\right). \tag{30}$$

ETAP 4: Agregacja znormalizowanych ocen wariantów decyzyjnych względem kryteriów (26) oraz wag kryteriów (29) lub (30) dla każdego $i = 1 \dots m$ zgodnie formułą

$$FSAW(A_i) = T\left(\sum_{j=1}^{n} a_{z_{ij}} a_{w_j}; \sum_{j=1}^{n} b_{z_{ij}} b_{w_j}; \sum_{j=1}^{n} c_{z_{ij}} c_{w_j}\right). \quad (31)$$

ETAP 5: Uporządkowanie liniowe i utworzenie rankingu wariantów decyzyjnych za względu na wartość funkcji defuzyfikacji $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$ zgodnie z (13), wyników działania funkcji agregującej. Wariantem końcowym jest ten o najwyższej wartości $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$.

5. PRZYKŁAD LICZBOWY

Załóżmy, że po wstępnej selekcji, decydent chce wybrać jeden z czterech wariantów decyzyjnych A_1, A_2, A_3 i A_4, które są oceniane względem pięciu kryteriów K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5. Kryteria K_1, K_2 i K_3 są stymulantami, natomiast kryteria K_4 i K_5 są destymulantami. Ze względu na nieprecyzyjność informacji do oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów zastosowano dodatnie trójkątne liczby rozmyte, a rezultaty zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. ROZMYTA MACIERZ DECYZYJNA OCEN WARIANTÓW DECYZYJNYCH WZGLĘDEM KRYTERIÓW

Wyszczególnienie	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
A_1	$T(53;72;91)$	$T(62;69;76)$	$T(50;70;90)$	$T(34;54;74)$	$T(41;61;81)$
A_2	$T(34;54;74)$	$T(56;62;68)$	$T(47;67;87)$	$T(36;54;72)$	$T(38;58;78)$
A_3	$T(30;49;68)$	$T(78;88;98)$	$T(42;62;82)$	$T(38;56;74)$	$T(43;61;79)$
A_4	$T(65;81;97)$	$T(37;39;41)$	$T(53;72;91)$	$T(31;53;75)$	$T(42;62;82)$

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Rozmytą macierz decyzyjną (tabela 1) poddano normalizacji zgodnie z formułą (26), a następnie na jej bazie wyznaczono entropię (e) zgodnie z (27), poziom zmienności entropii (d) zgodnie z (28), wagi kryteriów (w) zgodnie z (29), znormalizowane wagi kryteriów (w_n) zgodnie z formułą (30) i zestawiono w tabeli 2. Ponadto, aby ustalić ranking kryteriów w tabeli 2 pokazano również wartości defuzyfikacji wag $\phi_{CoG}(w_i)$ zgodnie z (13) i wartości $\phi_{CoGn}(w_i)$ wag po znormalizowaniu oraz ranking kryteriów R, który ma postać:

$$K_2 \prec K_3 \prec K_1 \prec K_5 \prec K_4.$$

Zagregowane znormalizowane oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów (tabela 1) i znormalizowane wagi kryteriów (tabela 2) zgodnie z formułą (31) przedstawiono w tabeli 3 w kolumnie $FSAW(A_i)$. Uzyskane wyniki poddano defuzyfikacji metodą środka ciężkość $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$ zgodnie z (13) co pozwala na określenie rankingów wariantów decyzyjnych i wskazanie wariantu końcowego. Z tabeli 3 wynika, że ranking wariantów decyzyjnych jest następujący

$$A_3 \prec A_2 \prec A_4 \prec A_1$$

co oznacza, że wariant A_1 jest wariantem końcowym. Zauważmy również, że wariant A_4 jest „nieznacznie" gorszy od wariantu A_1.

Tabela 2. ENTROPIA, POZIOM ZMIENNOŚCI, WAGI I WAGI ZNORMALIZOWANE ORAZ RANKING WAG

Wyszczególnienie	K_1	K_2	K_3
e	$T(0{,}7689; 0{,}9063; 0{,}9925)$	$T(0{,}9193; 0{,}9472; 0{,}9686)$	$T(0{,}7847; 0{,}9163; 0{,}9994)$
d	$T(0{,}0075; 0{,}0937; 0{,}2311)$	$T(0{,}0314; 0{,}0528; 0{,}0807)$	$T(0{,}0006; 0{,}0837; 0{,}2153)$
w	$T(0{,}0072; 0{,}1807; 5{,}4591)$	$T(0{,}0301; 0{,}1018; 1{,}9062)$	$T(0{,}0006; 0{,}1613; 5{,}0844)$
w_n	$T(0{,}0003; 0{,}0073; 0{,}2215)$	$T(0{,}0012; 0{,}0041; 0{,}0773)$	$T(0{,}0000; 0{,}0065; 0{,}2063)$
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,0764	0,0276	0,0710
$\phi_{CoGn}(w_i)$	0,2198	0,0793	0,2042
R	3	5	4
	K_4	K_5	
e	$T(0{,}7248; 0{,}8442; 0{,}9979)$	$T(0{,}7589; 0{,}8671; 0{,}9992)$	
d	$T(0{,}0021; 0{,}1558; 0{,}2752)$	$T(0{,}0008; 0{,}1329; 0{,}2411)$	
w	$T(0{,}0020; 0{,}3002; 6{,}5000)$	$T(0{,}0008; 0{,}2560; 5{,}6956)$	
w_n	$T(0{,}0001; 0{,}0122; 0{,}2637)$	$T(0{,}0000; 0{,}0104; 0{,}2311)$	
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,0920	0,0805	
$\phi_{CoGn}(w_i)$	0,2648	0,2317	
R	1	2	

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

6. PORÓWNANIE PROPONOWANEJ METODY Z INNYMI METODAMI WYKORZYSTUJĄCYMI ENTROPIĘ

W literaturze możemy znaleźć szereg prac wykorzystujących entropię do wyznaczenia wag kryteriów w metodach $FMCDM$. Znaczną ich część można podzielić na dwie grupy. Pierwszą stanowią prace, m.in. Wang, Lee (2009), Shemshadi i inni (2011), Zoraghi i inni (2013), Shahmardan, Zadeh (2013), Zhang i inni (2014), Garg i inni (2015), w których rozmyta macierz decyzyjna jest przekształcana w macierz rzeczywistą. Następnie stosowana jest klasyczna metoda wyznaczania wag z wykorzystaniem entropii (Hwang, Yoon, 1981; Kobryń, 2014), dając wagi rzeczywiste. Drugą grupę prac stanowią prace, m.in. Lotfi, Fallahnejad (2010), Chaghooshi i inni (2012), Cavallaro i inni (2016), wykorzystujące entropię przedziałową zaproponowaną przez Lotfi, Fallahnejada. Warto w tym miejscu wspomnieć o nowym podejściu do wyznaczania wag kryteriów z wykorzystaniem entropii zaproponowanym przez Kacprzaka (2017). Opiera się ono na modelu skierowanych liczb rozmytych i daje wagi w postaci skierowanych liczb rozmytych.

Tabela 3. WYNIKI DZIAŁANIA METODY $FSAW$ I RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH

Wyszczególnienie	$FSAW(A_i)$	$\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$	R
A_1	$T(0{,}0003; 0{,}0076; 0{,}2596)$	0,0892	1
A_2	$T(0{,}0003; 0{,}0071; 0{,}2450)$	0,0842	3
A_3	$T(0{,}0004; 0{,}0072; 0{,}2357)$	0,0811	4
A_4	$T(0{,}0002; 0{,}0074; 0{,}2597)$	0,0891	2

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Prezentowaną w części 4 metodę opierając się na przykładzie przedstawionym w części 5, porównamy z metodami wspomnianymi wyżej wykorzystującymi entropię do wyznaczania wag. Zaczniemy od porównania z metodami, które do wyznaczania wag przekształcają macierz decyzyjną, aby była zbudowana z liczb rzeczywistych. W tym celu rozmytą macierz decyzyjną (tabela 1) normalizujemy zgodnie z (26) i stosując metodę środka ciężkości (13) przekształcamy w macierz rzeczywistą. Wykorzystując klasyczną metodę entropii wyznaczamy wektor rzeczywistych wag kryteriów postaci

$$w = (0{,}2063;\ 0{,}1162;\ 0{,}1842;\ 0{,}2625;\ 0{,}2307).$$

Znormalizowaną rozmytą macierz decyzyjną mnożymy przez uzyskany wektor wag rzeczywistych otrzymując zagregowane wyniki $FSAW(A_i)$, które po defuzyfikacji określą ranking, co jest widoczne w tabeli 4. Uzyskany ranking wariantów decyzyjnych ma postać $A_3 \prec A_2 \prec A_4 \prec A_1$ i jest zgodny z uzyskanym w części 5 (tabela 3). W celu lepszego porównania wyników uzyskanych z wykorzystaniem defuzyfikacji, w tabeli 5 zestawiono znormalizowane zgodnie z (20) wyniki $\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$ widoczne w tabeli 3 ($T3$) oraz w tabeli 4 ($T4$). Widać z niej, że rezultaty stosowania metody $FSAW$, w której wagi są liczbami rozmytymi lub liczbami rzeczywistymi uzyskanymi po defuzyfikacji macierzy decyzyjnej i użyciu metody entropii są zbliżone. Należy jednak zwrócić uwagę, że w trakcie defuzyfikacji liczb rozmytych tracimy wiele cennych informacji takich jak symetria, szerokość nośnika i jądra, położenie na osi OX, co jest dodatkowym atutem proponowanej w części 4 metody, która zachowuje te informacje.

Tabela 4. WYNIKI DZIAŁANIA METODY $FSAW$ Z RZECZYWISTYMI WAGAMI I RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH

Wyszczególnienie	$FSAW(A_i)$	$\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$	R
A_1	$T(0{,}1447; 0{,}1909; 0{,}2597)$	0,1984	1
A_2	$T(0{,}1307; 0{,}1772; 0{,}2451)$	0,1843	3
A_3	$T(0{,}1334; 0{,}1786; 0{,}2405)$	0,1842	4
A_4	$T(0{,}1427; 0{,}1854; 0{,}2547)$	0,1943	2

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Aby porównać wynik prezentowanej metody z przedziałową entropią zaproponowaną przez Lotfi, Fallahnejada (2010), rozmytą macierz decyzyjną (tabela 1) przekształcamy, aby wszystkie kryteria były stymulantami korzystając z formuł (19) i (11). Następnie wyznaczamy przedziałowe wagi kryteriów oraz ich środki. Środki wag przedziałowych znormalizowano zgodnie z (20), co pozwala na ich porównywanie dla różnych wartości α, i zobrazowano na rysunku 1. Widać na nim, że dla niskich wartości α najistotniejszym kryterium jest K_4, a najmniej istotnym K_2. Uzyskany ranking kryteriów wygląda następująco $K_2 \prec K_3 \prec K_1 \prec K_5 \prec K_4$ i jest zgodny z uzyskanym w części 5 dla liczb rozmytych. W miarę wzrostu wartości α istotność kryteriów ulega zmianie i dla $\alpha = 1$ ich ranking ma postać $K_4 \prec K_5 \prec K_3 \prec K_1 \prec K_2$. Oznacza to, że wartość α ma wpływa na istotność kryteriów. W szczególności możemy zauważyć, że kryterium K_2 ze wzrostem α z najmniej istotnego staje się najbardziej istotne, a kryterium K_4 odwrotnie.

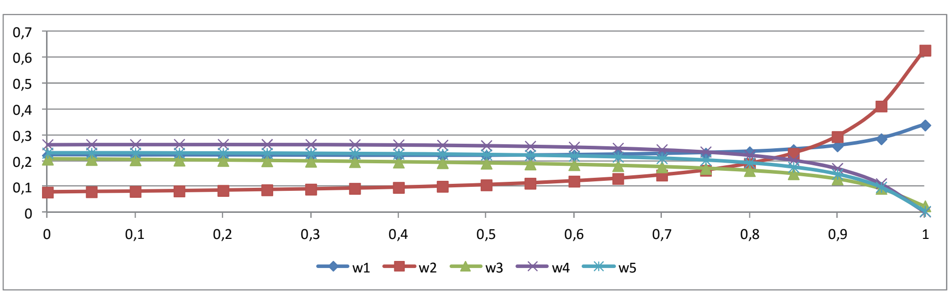
Na rysunku 2 pokazano jak wartość α wpływa na ranking wariantów decyzyjnych. Dla $\alpha < 0{,}682$ ranking ma postać $A_3 \prec A_2 \prec A_4 \prec A_1$ i jest zgodny z uzyskanym w części 5. Dla $\alpha \epsilon (0{,}682; 0{,}683)$ warianty decyzyjne A_3 i A_2 zamieniają się miejscami. Zwiększając wartość α dochodzi do kolejnych zmian pozycji wariantów w rankingu: dla $\alpha \epsilon (0{,}815; 0{,}816)$ między A_3 i A_4, dla $\alpha \epsilon (0{,}910; 0{,}911)$ A_2 i A_4, a dla $\alpha \epsilon (0{,}944; 0{,}945)$ wariantów A_1 i A_3 co daje ranking wariantów decyzyjnych postaci $A_4 \prec A_2 \prec A_1 \prec A_3$. Wynika z tego, że wariant A_3 o najniższej pozycji w ranking dla niskich wartości α zajmuje najwyższą pozycję przy wysokich wartościach α. Oznacza to, że wynik działania metody SAW na danych przedziałowych uzyskanych za pomocą α-przekrojów wejściowych liczb rozmytych jest zależny od wartości α.

Tabela 5. PORÓWNANIE WYNIKÓW DZIAŁANIA METODY $FSAW$ Z WAGAMI RZECZYWISTYMI I ROZMYTYMI

Wyszczególnienie	$T3$	$T4$
A_1	0,2596	0,2607
A_2	0,2450	0,2422
A_3	0,2360	0,2419
A_4	0,2594	0,2552

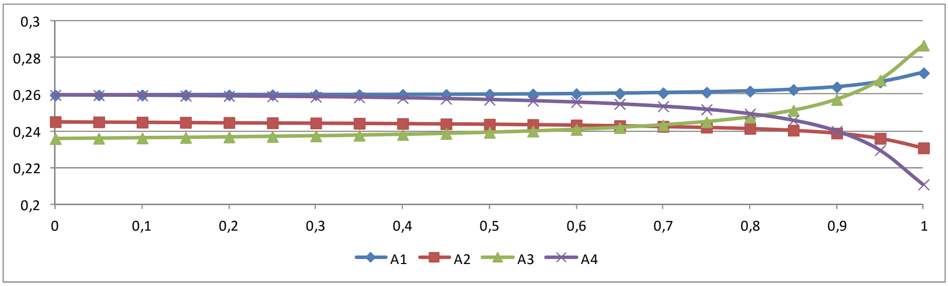
Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Rysunek 1. Znormalizowane wagi kryteriów dla różnych poziomów α



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Wartości SAW wariantów decyzyjnych dla różnych poziomów α



Źródło: opracowanie własne.

Porównamy jeszcze wyniki uzyskane proponowaną metodą z metodą $FSAW$ opartą na skierowanych liczbach rozmytych (Roszkowska, Kacprzak, 2016) i wagach wyznaczonych za pomocą entropii rozmytej (Kacprzak, 2017). Na podstawie danych z przykładu z części 5, wyznaczone wagi są widoczne w tabeli 6. Po zastosowaniu defuzyfikacji metodą środka ciężkości otrzymano ranking kryteriów postaci

$$K_3 \prec K_5 \prec K_1 \prec K_4 \prec K_2$$

czyli „niemal odwrotny" niż w części 5. Następnie wyznaczone wagi wykorzystano w metodzie $FSAW$ opartej na skierowanych liczbach rozmytych. Wyniki zestawione w tabeli 7 poddano defuzyfikacji metodą środka ciężkości i utworzono ranking wariantów decyzyjnych, który ma postać

$$A_4 \prec A_2 \prec A_1 \prec A_3$$

co oznacza, że wariant A_3 jest wariantem końcowym, podczas gdy był wariantem najsłabszym w przykładzie w części 5.

Tabela 6. WAGI ORAZ RANKING WAG UZYSKANE Z WYKORZYSTANIEM SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

Wyszczególnienie	K_1	K_2	K_3
w	$\overleftrightarrow{T}(0{,}2215; 0{,}1807; 0{,}1776)$	$\overleftrightarrow{T}(0{,}0773; 0{,}1018; 0{,}7408)$	$\overleftrightarrow{T}(0{,}2063; 0{,}1613; 0{,}0138)$
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,1932	0,3067	0,1271
R	3	1	5
	K_4	K_5	
w	$\overleftrightarrow{T}(0{,}2637; 0{,}3002; 0{,}0491)$	$\overleftrightarrow{T}(0{,}2311; 0{,}2560; 0{,}0188)$	
$\phi_{CoG}(w_i)$	0,2043	0,1686	
R	2	4	

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Tabela 7. WYNIKI DZIAŁANIA METODY $FSAW$ NA SKIEROWANYCH LICZBACH ROZMYTYCH I RANKING WARIANTÓW DECYZYJNYCH

Wyszczególnienie	$FSAW(A_i)$	$\phi_{CoG}(FSAW(A_i))$	R
A_1	$\overleftrightarrow{T}(0{,}1420; 0{,}1874; 0{,}2686)$	0,1993	2
A_2	$\overleftrightarrow{T}(0{,}1278; 0{,}1759; 0{,}2381)$	0,1806	3
A_3	$\overleftrightarrow{T}(0{,}1269; 0{,}1763; 0{,}3120)$	0,2051	1
A_4	$\overleftrightarrow{T}(0{,}1442; 0{,}1827; 0{,}1813)$	0,1694	4

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

7. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano rozmytą metodę SAW z nieznanymi wagami. Do ich wyznaczenia zastosowano metodę entropii, którą rozszerzono do entropii rozmytej. Pozwala ona na uzyskanie wag rozmytych i wykonanie rankingu wariantów decyzyjnych, w sytuacjach gdy decydenci czy eksperci wykorzystują liczby rozmyte lub zmienne lingwistyczne do oceny wariantów decyzyjnych wyglądem kryteriów. Ponadto wykorzystanie wag obiektywnych w prezentowanej metodzie pozwala zmniejszyć subiektywizm i nieprecyzyjność spowodowaną przez niepełną wiedzę, osądy, opinie i preferencje decydentów czy ekspertów.

LITERATURA

Abdullah L., Adawiyah C. W. R., (2014), Simple Additive Weighting Methods of Multicriteria Decision Making and Applications: A Decade Review, *International Journal of Information Processing and Management*, 5/1, 39–49.

Abdullah L., Jamal N. J., (2010), Determination of Weights for Health Related Quality of Life Indicators Among Kidney Patients: A Fuzzy Decision Making Method, *Applied Research in Quality of Life*, 6 (4), 349–361.

Cavallaro F., Zavadskas E. K., Raslanas S., (2016), Evaluation of Combined Heat and Power (CHP) Systems Using Fuzzy Shannon Entropy and Fuzzy TOPSIS, *Sustainability*, 8 (6), 556.

Chaghooshi A. J., Fathi M. R., Kashef M., (2012), Integration of Fuzzy Shannon's Entropy with Fuzzy TOPSIS for Industrial Robotic System Selection, *Journal of Industrial Engineering and Management*, 5 (1), 102–114.

Churchman C. W., Ackoff R. L., (1954), An Approximate Measure of Value, *Journal of Operations Research Society of America*, 2 (1), 172–187.

Czogała E., Pedrycz W., (1985), *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, PWN, Warszawa.

Deni W., Sudana O., Sasmita A., (2013), Analysis and Implementation Fuzzy Multi-Attribute Decision Making SAW Method for Selection of High Achieving Students in Faculty Level, *International Journal of Computer Science*, 10/1–2, 674–680.

Garg H., Agarwal N., Tripathi A., (2015,) Entropy Based Multi-criteria Decision Making Method Under Fuzzy Environment and Unknown Attribute Weights, *Global Journal of Technology and Optimization*, 6 (3), 13–20.

Gupta S., Gupta A., (2012), A Fuzzy Multi Criteria Decision Making Approach for Vendor Evaluation in a Supply Chain, *Interscience Management Review*, 2 (3), 10–16.

Hwang C. L., Yoon K., (1981), *Multiple Attribute Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer.

Kacprzak D., (2017), Objective Weights Based on Ordered Fuzzy Numbers for Fuzzy Multiple Criteria Decision Making Methods, *Entropy*, 19 (7), 373.

Kaufmann A., Gupta M. M., (1988), *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam, N.Y.

Kobryń A., (2014), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji w gospodarowaniu przestrzenią*, Difin, Warszawa.

Lin H. Y., Liao C. J., Chang Y. H., (2010), Applying Fuzzy Simple Additive Weighting System to Health Examination Institution Location Selection, *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, 646–650.

Lotfi F. H., Fallahnejad R., (2010), Imprecise Shannon's Entropy and Multi Attribute Decision Making, Entropy, 12, 53-62.

Roszkowska E., Kacprzak D., (2016), The Fuzzy SAW and Fuzzy TOPSIS Procedures Based on Ordered Fuzzy Numbers, *Information Sciences*, 369, 564-584.

Sagar M. K., Jayaswal P., Kushwah K., (2013), Exploring Fuzzy SAW Method for Maintenance Strategy Selection Problem of Material Handling Equipment, *International Journal of Current Engineering and Technology*, 3 (2), 600–605.

Shahmardan A., Zadeh M. H., (2013), An Integrated Approach for Solving a MCDM Problem, Combination of Entropy Fuzzy and F-PROMETHEE Techniques, *Journal of Industrial Engineering and Management*, 6 (4), 1124-1138.

Shemshadi A., Shirazi H., Toreihi M., Tarokh M. J., (2011), A Fuzzy VIKOR Method for Supplier Selection Based on Entropy Measure for Objective Weighting, *Expert Systems with Applications*, 38 (10), 12160–12167.

Wang T. C., Lee H. D., (2009), Developing a Fuzzy TOPSIS Approach Based on Subjective Weights and Objective Weights, *Expert Systems with Applications*, 36, 8980–8985.

Zadeh L. A., (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338–353.

Zhang Y., Wang Y., Wang J., (2014), Objective Attributes Weights Determining Based on Shannon Information Entropy in Hesitant Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1-7.

Zoraghi N., Amiri M., Talebi G., Zowghi M., (2013), A Fuzzy MCDM Model with Objective and Subjective Weights for Evaluating Service Quality in Hotel Industries, *Journal of Industrial Engineering International*, 9 (1), 1–13.

ROZMYTA METODA *SAW* Z WAGAMI UZYSKANYMI ZA POMOCĄ ROZMYTEJ ENTROPII

Streszczenie

W pracy przedstawiono nowe podejście do rozmytej metody SAW, w której wykorzystano rozmytą entropię. Umożliwia ono wskazanie wariantu końcowego za pomocą metody $FSAW$, gdy decydenci wykorzystują liczby rozmyte lub *zmienne lingwistyczne. Ponadto prezentowana metoda pozwala uniknąć subiektywizmu decydenta i nieprecyzyjność spowodowanej przez niepełną wiedzę, osądy, opinie i preferencje decydentów.*

Słowa kluczowe: liczby rozmyte, metoda SAW, entropia, wagi obiektywne, zmienne lingwistyczne

THE FUZZY *SAW* METHOD AND WEIGHTS DETERMINED BASED ON FUZZY ENTROPY

Abstract

The paper presents a new approach to the fuzzy SAW method, which uses fuzzy entropy. It allows to identify the best alternative by the application $FSAW$ method if decision makers use fuzzy numbers or linguistic variables. Moreover, the presented method allows to avoid subjectivity and imprecision caused by incomplete knowledge, judgments, opinions and preferences of decision makers.

Keywords: fuzzy numbers, SAW method, entropy, objective weights, linguistic variables